Resolución de circuitos complejos de corriente continua: Leyes de Kirchhoff.

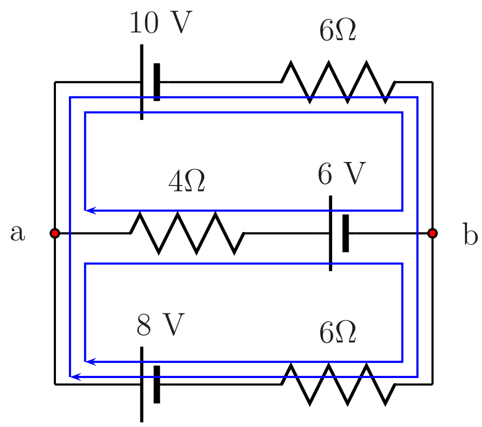
Juan P. Campillo Nicolás

4 de diciembre de 2013

1. Leyes de Kirchhoff.

Algunos circuitos de corriente continua están formados por asociaciones mixtas de resistencias serie/serie-paralelo, además de varios generadores. La resolución de estos circuitos (es decir, el calculo de las intensidades de corriente o de la diferencia de potencial entre dos puntos dados) puede ser realizado utilizando las Leyes de Kirchhoff.

Antes de enunciar estas leyes, es preciso definir dos conceptos, como son el de *nudo* y el de *malla*. Denominamos *nudo* al punto del circuito en que convergen tres o más conductores. Por otra parte, llamamos *malla* a cada uno de los caminos cerrados que puede seguir la corriente. Así, en el siguiente circuito podemos observar que existen dos nudos y tres mallas.



Los nudos corresponden a los puntos a y b, mientras que las mallas corresponden a los tres caminos cuya trayectoria está señalada en color aul.

Una vez definidos estos dos conceptos, vamos a enunciar las leyes de Kirchhoff, que son las siguientes:

1ª Ley: *La suma algebraica de las intensidades de corriente que convergen en un nudo es igual a cero*. Matemáticamente, podemos expresar esta 1ª ley de la forma: $\sum I_i = 0$

2ª Ley:*La suma algebraica de las fuerzas electromotrices en una malla es igual a la suma algebraica de los productos de intensidad por resistencia en dicha malla* . En términos matemáticos: $\sum \varepsilon_i = \sum I_i \cdot R_i$.

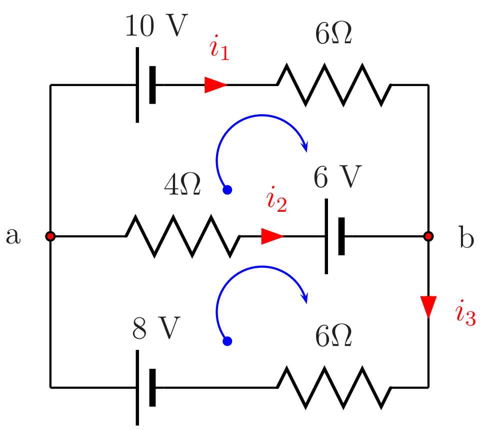
Para aplicar estas dos leyes, es necesario establecer, de forma arbitraria, un sentido para cada una de las corrientes que circulen por cada rama del circuito y un sentido global de circulación de la corriente para cada malla, que debe ser el mismo en cada una de las mallas que componen el circuito. En función de este sentido, estableceremos los siguientes criterios de signos que

1.- La fuerza electromotriz (ε) de un generador se considera positiva si aquel es atravesado por la corriente de polo negativo a positivo, y negativo en caso contrario.

2.- La caída de tensión, IR, se considera positiva cuando la corriente de malla coincide con el sentido de la corriente que hemos asignado arbitrariamente a la corriente.

.

En el circuito representado anteriormente, las intensidades de cada rama y la intensidad de la corriente de malla se representan en color rojo y azul, respectivamente.



En general, si un circuito posee m mallas y n nudos, necesitaremos un número de ecuaciones de m - *1* para las mallas y de n -*1* para los nudos. Como quiera que el presente circuito tiene tres mallas y dos nudos, nos bastará, para hallar las tres intensidades de corriente, plantear una ecuación para los nudos, y dos ecuaciones para las mallas, obteniéndose las ecuaciones siguientes:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$10 - 6 = 6I_1 - 4I_2$$

$$6 - 8 = 4I_2 + 6I_3$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones, obtenemos los siguientes valores:

$$\mathrm{I}_1 = 0,38 \text{ A} \qquad \mathrm{I}_2 = -0,43 \text{ A} \qquad \mathrm{I}_3 = -0,05 \text{ A}$$

El signo negativo obtenido para una intensidad significa que el sentido que hemos tomado para ella es incorrecto, siendo el sentido contrario el seguido realmente por la corriente. No obstante, el valor absoluto de la intensidad seguirá siendo el mismo.

2. Diferencia de potencial entre dos puntos.

Veamos a continuación cómo podemos calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de un circuito. Para ello, es necesario conocer la intensidad que atraviesa el camino que elijamos para ir de uno a otro punto. En el circuito que acabamos de resolver podemos, para ir de a a b, seguir el camino recorrido por las corrientes I_1, I_2 o I_3. En cualquier caso, la diferencia de potencial obtenida deberá ser la misma. La diferencia de potencial entre dos puntos vendrá dada por la expresión:

$$\Delta V = \Sigma\varepsilon_i - I\Sigma R_i$$

, donde se mantendrá el criterio de signos empleado anteriormente, es decir, una fuerza electromotriz se considerará positiva cuando el camino que va del primer al segundo punto la atraviese de polo negativo a positivo. La intensidad se considerará positiva cuando vaya en el sentido del primer al segundo punto, y negativa en caso contrario, por lo que, en este segundo caso, la diferencia de potencial sería $\Delta V = \Sigma\varepsilon_i + I\Sigma R_i$. Utilizaremos los valores de intensidad que hayamos obtenido, incluyendo sus respectivos signos.

Calcularemos ahora la diferencia de potencial entre los puntos a y b del circuito anteriormente representado. Poddemos realizr este cálculo por tres caminos diferentes: el que sigue la rama superior (1), el camino central (2) y el de la rama inferior (3). Como se ha calculado previamente, las intensidades respectivas son I_1 = 0,38 A; I_2 = -0,43 A e I_3 = -0,05 A. Por tanto, la diferencia de potencial entre a y b será:

$$\text{Camino 1} : V_a - V_b = 10 - 6 \cdot 0,38 = 7,72\ V$$

$$\text{Camino 2} : V_a - V_b = 6 - (-0,43)4 = 7,72V \cdot 0,38 = 7,72\ V$$

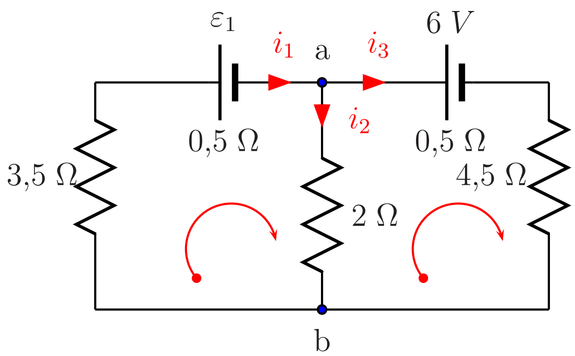
$$\text{Camino 3} : V_a - V_b = 8 - 6(-0,05) \cdot 0,38 = 7,7\ V$$

La pequeña discrepancia entre los valores obtenidos entre los caminos 1 y 3 y entre los caminos 2 y 3 se debe a la aproximación a dos decimales realizada en el cálculo de la intensidad de corriente.

3. Ejemplos resueltos paso a paso.

1.- 1.a.- Calcular el valor de ε_1 para que la intensidad I_1 valga 4 A.

1.b.- Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b.



1.a.- Aplicando las leyes de Kirchhoff, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 = (3,5 + 0,5)I_1 + 2I_2$$
$$6 = (0,5 + 4,5)I_3 - 2I_2$$

Sustituyendo I_1 por 4, nos queda:

$$4 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 = 16 + 2I_2$$
$$6 = 5I_3 - 2I_2$$

Despejando en la primera de las ecuaciones, tendremos que: $I_3 = 4 - I_2$. Sustituyendo este valor en la tercera ecuación, obtendremos:$6 = -2I_2 + 5(4 - I_2) = 0$, que, al resolver, nos dará el valor $I_2 = 2$ A.

Finalmente, obtenemos los valores $I_3 = 2$ A y $\varepsilon_1 = 20$ V.

1.b.- Para hallar la diferencia de potencial entre a y b, elegimos el camino seguido por la intensidad I_2. La diferencia de potencial será así:

$$V_a - V_b = 0 - 2I_2 = 0 - 4 = -4 \text{ V}$$

Lo que indica que el potencial del punto b es superior al del punto a.

Como comprobación podemos calcular esta diferencia de potencial siguiendo los otros dos caminos posibles: el seguido por la corriente i_3 y el recorrido por i_1. En el primer caso, tendremos:

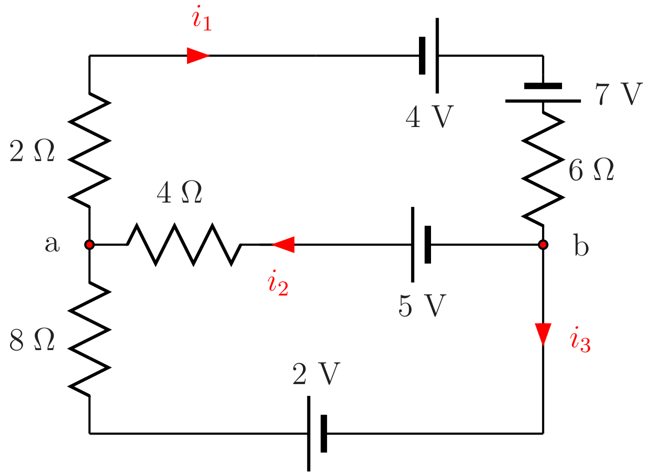
$$V_a - V_b = 6 - (0,5 + 4,5)2 = -4\ V$$

En el segundo caso:

$$V_a - V_b = -20 + (3,5 + 0,5)4 = -4\ V$$

Como podemos comprobar, la diferencia de potencial entre a y b es la misma, cualquiera que se a el camino seguido.

2.- Calcular la intensidad que atraviesa cada rama del circuito, así como la diferencia de potencial entre a y b.



2.a.- Las ecuaciones obtenidas son las siguientes:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$-4 - 7 - 5 = (6+2)I_1 + 4I_2$$

$$5 - 2 = -4I_2 + 8I_3$$

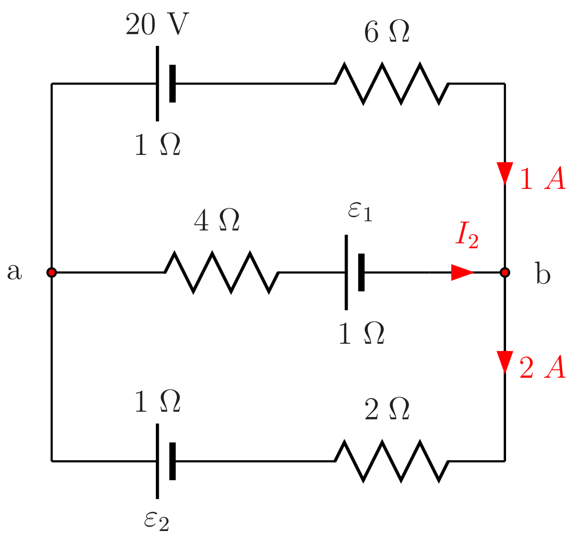
Sistema que, al ser resuelto, nos da los siguientes valores:

$$I_1 = -1,40\ A \quad I_2 = -1,19\ A \quad I_3 = -0,22\ A$$

2.b.- La diferencia de potencial será:

$$V_a - V_b = 4 + 5I_2 = 4 + 5(-1,19) = -1,95\ V$$

3.- Calcular las fuerzas electromotrices ε_1 y ε_2, así como la diferencia de potencial entre los puntos a y b del siguiente circuito:



En el nudo a se cumple que: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$. Sustituyendo: 1 + I_2 - 2 = 0, de donde $I_2 = 1$ A. Para la malla superior, podemos plantear la ecuación:

$$20 - \varepsilon_1 = (6+1)I_1 - (4+1)I_2$$

. Sustituyendo, tendremos: 20 - $\varepsilon_1 = (6+1)1 - (4+1)1$, obteniéndose $\varepsilon_1 = 18$ V.

En la malla inferior puede plantearse:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (2+1)I_3 + (4+1)I_2$$

Sustituyendo valores, nos queda:

$$18 - \varepsilon_2 = 2(2+1) + 1(4+1)$$

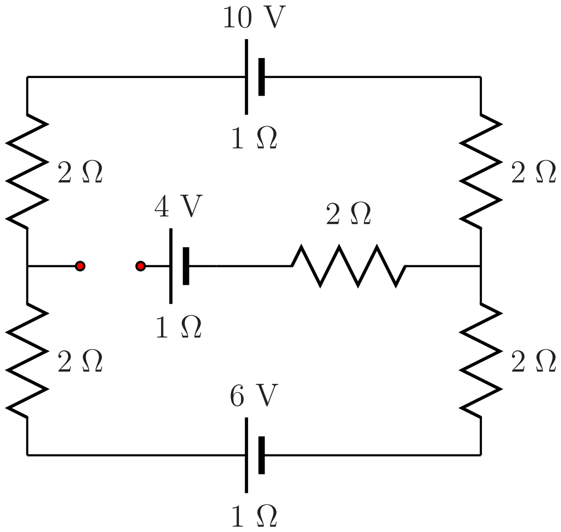
Al despejar, se obtiene $\varepsilon_2 = 7$ V.

Por último, la diferencia de potencial entre a y b viene dada por:

$$V_a - V_b = \varepsilon_1 - I_2(4+1) \Rightarrow V_a - V_b = 18 - 5 = 13\ V$$

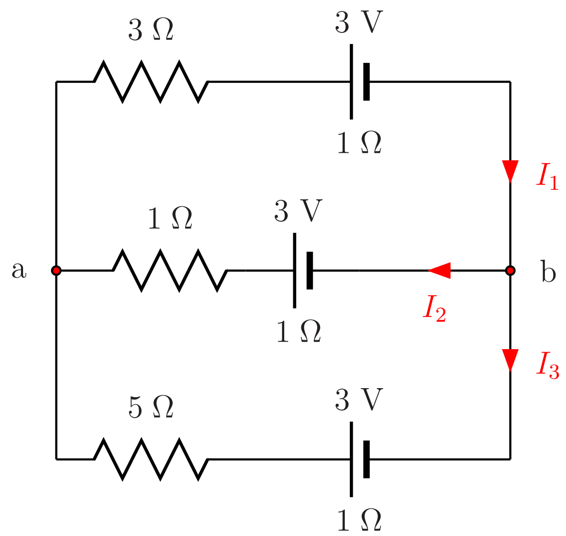
4. Otros ejemplos.

1.- Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b. Si se comunican estos puntos, ¿cuáles serán las intensidades que atravesarán cada una de las ramas del circuito?



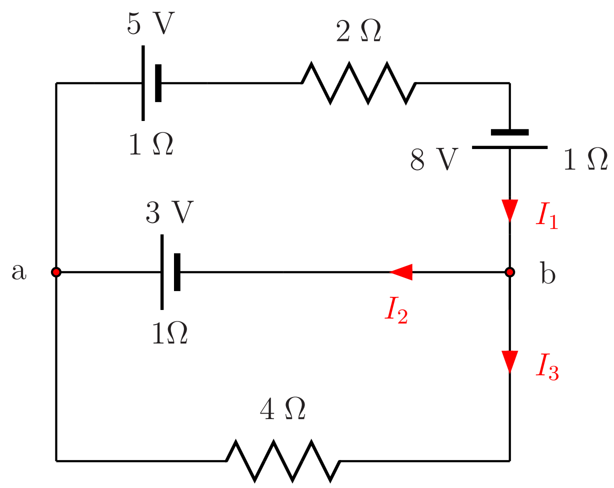
R: $4\ V : I_1 = 0,76\ A; I_2 = -0,03\ A; I_3 = 0,73\ A$

2.- Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b del siguiente circuito:



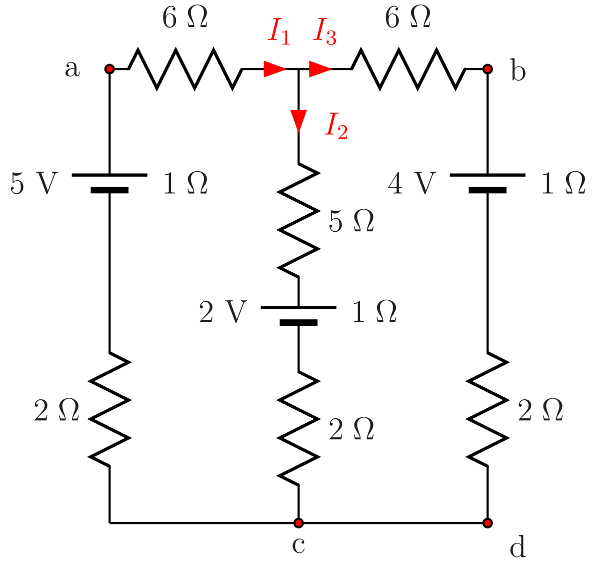
R: -0,27 V

3.- Calcular la diferencia de potencial entre los puntos a y b, siguiendo todos los caminos posibles.



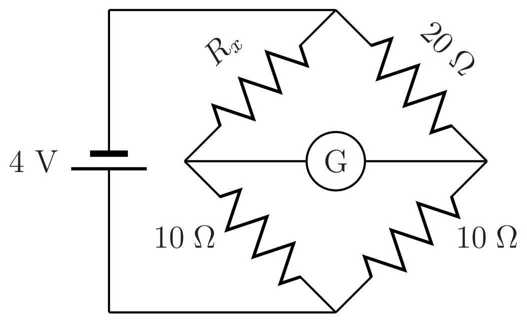
R: 1,5 V

4.- Hallar las diferencias de potencial V_{ab}, V_{ac} y V_{ad} en el siguiente circuito:



R: $V_{ab} = 0,66\ V \quad V_{ac} = 1,33\ V \quad V_{ad} = 4,53\ V$

5.- Calcular el valor de la resistencia R_x para que el galvanómetro de la figura no registre paso de corriente.



R: 20 Ω